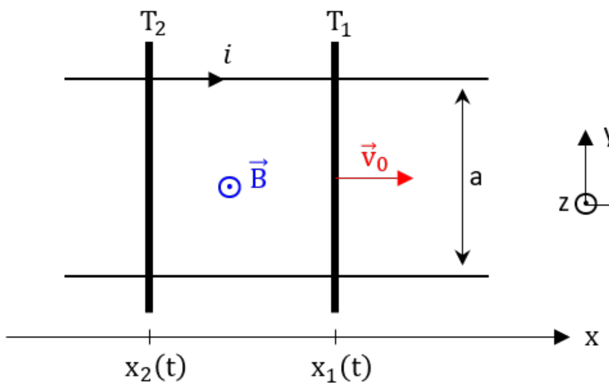
Induction | Chapitre 5 | Correction TD (I5)

Exercice n°1 • Rails de Laplace avec deux tiges *cours*

1) La tige T_1 part vers la droite. Cela augmente le flux ϕ à travers le circuit. Un courant dans le sens horaire apparaît pour compenser cette augmentation de flux. Le courant provoque l'apparition d'une force de Laplace sur chaque tige : dirigée selon $-\overrightarrow{e}_x$ pour T_1 et selon $+\overrightarrow{e}_x$ pour T_2. Ainsi, T_1 ralenti et T_2 accélère. Le système atteint l'équilibre lorsque les vitesses de chaque tige sont égales (flux constant même si les tiges sont en mouvement).

2) On oriente le courant dans le sens horaire.



Le flux à travers le circuit vaut :

$$\phi = -Ba\,(x_1 - x_2)$$

Loi de Faraday et loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \boxed{Ba\,(v_1 - v_2) = 2Ri}$$

3) Force de Laplace de chaque tige :

$$\overrightarrow{F}_{L1} = -ia\,\overrightarrow{e}_y \wedge B\,\overrightarrow{e}_z = -iaB\,\overrightarrow{e}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_{L2} = ia\,\overrightarrow{e}_y \wedge B\,\overrightarrow{e}_z = iaB\,\overrightarrow{e}_x$$

Ainsi les PFD donnent :

$$m\dot{v}_1 = -iaB \quad \text{et} \quad m\dot{v}_2 = iaB$$

4) On somme les PFD :

$$m \cdot \frac{d}{dt}\left(v_1 + v_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 + v_2 = cte = v_0}$$

5) On en déduit le courant i en fonction de v_1 uniquement :

$$i = \frac{Ba}{2R}\,(2v_1 - v_0)$$

que l'on injecte dans le PFD de T_1 :

$$m\dot{v}_1 = -\frac{(Ba)^2}{2R}\,(2v_1 - v_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_1 + \underbrace{\frac{(Ba)^2}{mR}}_{=1/\tau} v_1 = \frac{(Ba)^2}{2mR} v_0$$

On en déduit :

$$\boxed{v_1 = \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-t/\tau}\right) \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

6) L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty Ri^2\,dt = \frac{(Ba)^2}{2R}\int_0^\infty (v_1 - v_2)^2\,dt = \frac{(Bav_0)^2}{2R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\,dt$$

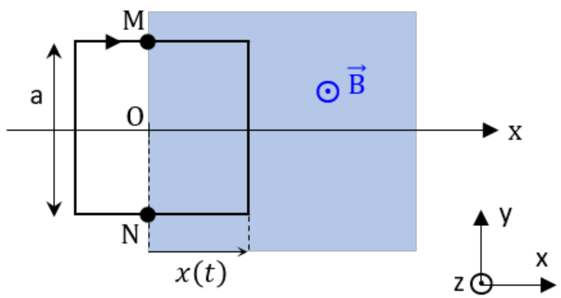
On en déduit :

$$\mathcal{E}_J = \tau\,\frac{(Bav_0)^2}{4R} = \boxed{\frac{1}{4}mv_0^2} = \mathcal{E}_i(T_1) - \mathcal{E}_f(T_1) - \mathcal{E}_f(T_2)$$

L'énergie perdue est égale à la différence d'énergie cinétique entre la fin et le début de l'expérience.

Exercice n°2 • Freinage d'un mobile en translation *cours*

1) Il faut choisir un sens d'orientation de la spire. On choisit le sens horaire.



Par définition :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S}}{dt} = \frac{dBS}{dt} = \frac{dBax}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = Ri = Bav}$$

Avec S la surface de la spire dans le champ magnétique.

2) Seule la partie de la spire dans le champ magnétique subit une force de Laplace. Ainsi,

$$\overrightarrow{F}_L = i\,\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B} = \boxed{-iaB\,\overrightarrow{e}_x}$$

On applique le PFD ur la spire dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\boxed{m\dot{v} = -iaB}$$

3) On en déduit :

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

Ainsi, avec les CI :

$$\boxed{v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \tau v_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

4) On a :

$$a = \tau v_0 \left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = 1 - \frac{a}{\tau v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = -\tau \ln\left(1 - \frac{a}{\tau v_0}\right)}$$

5) Lorsque la spire devient entièrement immergée, la vitesse vaut :

$$v_1 = v_0\, e^{-t_1/\tau} = v_0 - \frac{a}{\tau}$$

La spire garde une vitesse constante tant qu'elle est entièrement immergée (résultante des forces de Laplace nulle).

Durant la phase de sortie, on a :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{dBa\,(a-x)}{dt} \quad \Rightarrow \quad e = Ri = -Bav$$

Force de Laplace :

$$\overrightarrow{F}_L = i\,\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{B} = iaB\,\overrightarrow{e}_x$$

Le PFD donne :

$$m\dot{v} = iaB \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0$$

On choisit une nouvelle origine des temps. On pose $t' = 0$ l'instant où le cadre commence à sortir. Ainsi :

$$v(t') = v_1\, e^{-t'/\tau} \quad \Rightarrow \quad x(t') = \tau v_1 \left(1 - e^{-t'/\tau}\right)$$

Le temps t'_1 et la vitesse v'_1 lorsque la spire sort entièrement du champ magnétique valent :

$$t'_1 = -\tau \ln\left(1 - \frac{a}{\tau v_1}\right) \quad \text{et} \quad v'_1 = v_1 - \frac{a}{\tau}$$

Une fois la spire sortie, elle conserve sa vitesse. Il s'agit donc de la vitesse v_∞ demandée.

$$\boxed{v_\infty = v_0 - \frac{2a}{\tau}}$$

6) L'énergie dissipée par effet Joule durant la phase d'entrée vaut :

$$\mathcal{E}_1 = \int_0^{t_1} Ri^2\, dt = \frac{(Ba)^2}{R} \int_0^{t_1} v^2\, dt = \frac{(Bav_0)^2}{R} \int_0^{t_1} e^{-2t/\tau}\, dt$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{(Bav_0)^2}{R}\left(e^{-2t_1/\tau} - 1\right) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - v_1^2\right)$$

De même durant la phase de sortie :

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_\infty^2\right)$$

Donc l'énergie totale dissipée :

$$\boxed{\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}'_1 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - v_\infty^2\right)}$$

Il s'agit de la perte d'énergie cinétique.

Exercice n°3 • Spire en rotation ★☆☆

1) Le flux du champ dans le circuit vaut :

$$\phi_{ext} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = BS\cos(\theta)$$

On prend en compte le flux propre de la spire.

$$\phi_p = Li$$

On applique la loi de Faraday :

$$e = -\frac{\phi_{tot}}{dt} = -L\frac{di}{dt} + BS\omega \sin(\theta)$$

On applique la loi des mailles :

$$\boxed{e = Ri = -L\frac{di}{dt} + BS\omega \sin(\theta)}$$

Le système est la spire étudiée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La spire subit un couple moteur, un couple de frottement et le couple de Laplace. On applique le TMC sur (Oz).

$$\boxed{J_z\dot{\omega} = \Gamma_{mo} - \gamma\omega - iSB \sin(\theta)}$$

2) On multiplie l'EE par $i(t)$ et l'EM par $\omega(t)$. On obtient :

$$\underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{joule}} = \underbrace{iBS\omega \sin(\theta)}_{\mathcal{P}_{fem}} - \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\mathcal{E}_{mag}}\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}J_z\omega^2}_{\mathcal{E}_{cin}}\Big) = \underbrace{\Gamma_{mo}\omega}_{\mathcal{P}_{motrice}} \underbrace{-iSB\omega \sin(\theta)}_{\mathcal{P}_{Laplace}} \underbrace{-\gamma\omega^2}_{\mathcal{P}_{frott.}}$$

On combine les deux :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_{cin} + \mathcal{E}_{mag}\right) = \mathcal{P}_{motrice} - Ri^2 - \gamma\omega^2}$$

L'énergie stockée (sous forme d'énergie cinétique de rotation et d'énergie magnétique) augmente grâce au moteur mais diminue du fait de l'effet Joule et des frottements.

Exercice n°4 • Rampe de lancement ★☆☆

1) Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et de la vitesse d'un objet massif,

$$\boxed{u_c(0^-) = u_c(0^+) = E} \quad \text{et} \quad \boxed{v(0^-) = v(0^+) = 0}$$

2) Flux :

$$\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = -Bax$$

Loi de Faraday et loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = Bav \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = Ri + u_c = Bav}$$

On projette le PFD sur l'axe horizontal (seule la force de Laplace est à prendre en compte) :

$$\boxed{m\dot{v} = -iaB}$$

3) En combinant les deux équations :

$$Ri + u_c = Bav \quad \Rightarrow \quad R\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -Ba \cdot \frac{iaB}{m}$$

Ainsi,

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC} + \frac{(Ba)^2}{mR}\right)}_{=1/\tau} i(t) = 0$$

De plus,

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC} + \frac{(Ba)^2}{mR}\right)}_{=1/\tau} i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}}$$

4) On en déduit :

$$\dot{v} = -iaB = \frac{aBE}{R}\,e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{aBE\tau}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

On en déduit la vitesse finale:

$$\boxed{v_\infty = \frac{aBE\tau}{R}}$$

5) L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} Ri^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau}\,dt = \boxed{\frac{\tau E^2}{2R}}$$

De manière équivalente, un bilan d'énergie donne :

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2 - \frac{1}{2}Cu_{c,\infty}^2 - \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

Simplifier cette expression demande plus de travail...

Exercice n°5 • Amortissement magnétique ★☆☆

1) On applique le PFD sur le cadre à l'équilibre.

$$0 = -k\left(z_{eq} - \frac{a}{2} - \ell_0\right) - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{eq} = \ell_0 + \frac{a}{2} - \frac{mg}{k}}$$

2) On oriente la spire dans le sens trigonométrique. On a donc :

$$\phi = \iint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = aB_0 \int_{z-a/2}^{z+a/2} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right) dz = B_0 a^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)$$

Ainsi,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B_0 a^2 v}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ri = \frac{B_0 a^2 v}{\delta}}$$

Le force de Laplace vaut :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_L} = \oint i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} &= -iaB_0\left(1 - \frac{z - a/2}{\delta}\right)\overrightarrow{e_y} + iaB_0\left(1 - \frac{z + a/2}{\delta}\right)\overrightarrow{e_y} \\ &= -\frac{ia^2B_0}{\delta}\overrightarrow{e_y} \end{aligned}$$

Le PFD donne donc :

$$\boxed{m\ddot{z} = mg - k\left(z - \ell_0\right) - \frac{ia^2B_0}{\delta}}$$

3) On combine les deux équations :

$$m\ddot{z} = mg - k\left(z - \frac{a}{2} - \ell_0\right) - \frac{ia^4B_0^2}{R\delta}\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{ia^4B_0^2}{mR\delta}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{eq}}$$

La force de Laplace se comporte comme une force de frottement fluide.

4) Faisons un bilan d'énergie :

$$Ri^2 = \frac{B_0a^2vi}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2\right) = -\frac{iva^2B_0}{\delta}$$

On en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k\left(z - z_{eq}\right)^2\right) = -Ri^2$$

Et donc, l'énergie dissipée par effet Joule :

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \int_0^{\infty} Ri^2\, dt = \frac{1}{2}kh^2}$$

Exercice n°6 • Oscillateurs couplés par induction ★★☆

1) La barre 1 va se diriger vers la gauche. Le flux va diminuer, ce qui va créer un courant induit, et donc des forces de Laplace sur chaque barre. La barre 1 va être ralentie et la barre 2 va être accélérer vers la gauche, d'après la loi de Lenz. Les deux barres vont se comporter comme des oscillateurs amortis car de l'énergie sera perdu par effet Joule. Lorsque $t \to \infty$, le seul mouvement envisageable (car ilsefait à flux constant) est celui où les deux barres oscillent en phase (donc deux oscillateurs harmoniques en phase).

2) On prend O_1 comme centre du repère.

Équation électrique :

$$\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = -Ba\left(x_1 - x_2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 2Ri = Ba\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)}$$

PFD sur chaque barre :

$$\boxed{m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 - \ell_0\right) - iaB \quad \text{et} \quad m\ddot{x}_2 = k\left(-x_2 - \ell_0\right) + iaB}$$

3) On combine les équations.

$$\begin{aligned} \text{(EM1)} - \text{(EM2)} \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{d} = -k\left(d - 2\ell_0\right) - 2iaB \\ \text{avec : (EE)} \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{d} = -k\left(d - 2\ell_0\right) - \frac{(aB)^2}{R}\dot{d} \\ &\Rightarrow \quad \ddot{d} + \underbrace{\frac{(aB)^2}{mR}}_{=\omega_0/Q}\dot{d} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_0^2} d = \frac{k}{m}\underbrace{2\ell_0}_{=d_{eq}} \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{d} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{d} + \omega_0^2\, d(t) = \omega_0^2\, d_{eq}} \\ \text{(EM1)} + \text{(EM2)} \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{s} = -ks \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{s} + \omega_0^2\, s(t) = 0} \end{aligned}$$

4) On pose : $\lambda = \omega_0/2Q$ et $\Omega \simeq \omega_0$ (la pseudo-pulsation) puisque $Q \gg 1$.

Les CI donnent : $\ell_1(0) = \ell_0 + x_0$, $\ell_2(0) = \ell_0$ et les vitesses nulles. Il vient donc :

$s(0) = x_0$, $d(0) = x_0 + 2\ell_0$ et les deux dérivées nulles en 0.

Ainsi :

$$\boxed{s(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad d(t) \simeq (x_0 + 2\ell_0)\ \cos(\omega_0 t)\ e^{-\lambda t}}$$

Démonstration pour $d(t)$:

$$\begin{aligned}
d(t) &= e^{-\lambda t}\left[(x_0 + 2\ell_0)\ \cos(\omega_0 t) + (x_0 + 2\ell_0)\ \frac{\lambda}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right] \\
&= (x_0 + 2\ell_0)\ e^{-\lambda t}\left[\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q}\sin(\omega_0 t)\right] \\
&\simeq (x_0 + 2\ell_0)\ \cos(\omega_0 t)\ e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{s+d}{2} = \frac{1}{2}\left[x_0 + (x_0 + 2\ell_0)\ e^{-\lambda t}\right]\cos(\omega_0 t) \\
x_2(t) &= \frac{s-d}{2} = \frac{1}{2}\left[x_0 - (x_0 + 2\ell_0)\ e^{-\lambda t}\right]\cos(\omega_0 t)
\end{aligned}}$$

Exercice n°7 • Freinage par induction ★★☆

1) Flux : $\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = BS\cos(\theta)$. Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega\sin(\theta)$$

Loi des mailles :

$$\boxed{i = \frac{BS\omega}{R}\sin(\theta)}$$

2) Moment du couple des forces de Laplace :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}_L = i\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{B} = -iBS\sin(\theta)\ \overrightarrow{e}_z = -\frac{\omega}{R}\left(BS\omega\sin(\theta)\right)^2\overrightarrow{e}_z}$$

3) On suppose ω constant sur un tour et on prend la valeur moyenne de $\sin^2(\theta)$.

$$\boxed{\langle\overrightarrow{\Gamma}_L\rangle = -\frac{\omega S^2B^2}{R}\ \overrightarrow{e}_z}$$

4) TMC :

$$J\dot{\omega} = -\frac{\omega S^2B^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = 0} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\omega(t) = \omega_0\ e^{-t/\tau}}$$

5) L'hypothèse « ω varie peu sur un tour » se traduit mathématiquement par (en notant T la période de rotation) :

$$\omega(t) - \omega(t+T) \ll \omega(t)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\omega_0\ e^{-t/\tau} - \omega_0\ e^{-(t+T)/\tau} \ll \omega_0\ e^{-t/\tau} \quad &\Rightarrow\quad 1 - e^{-T/\tau} \ll 1 \\
&\Rightarrow\quad T \ll \tau \\
&\Rightarrow\quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \gg \frac{2\pi}{\tau}}
\end{aligned}$$

Exercice n°8 • Pendules couplés par induction ★★★

1) 1) En $t = 0^+$, la tige bleue est verticale et la tige rouge commence à tomber du fait de la gravité. Cela a pour conséquence de réduire la surface de circuit et donc le flux. Un courant se développe alors pour contrer cette diminution de flux (loi de Lenz). Ainsi $i(0^+) > 0$, de sorte que les forces de Laplace tendent à contrer cette diminution de flux : la tige 1 est ralentie dans sa chute et la tige 2 subit une force vers la gauche.

Dans l'état final, le flux ne doit plus varier. Les deux pendules oscillent donc nécessairement en phase et avec la même amplitude.

2) Flux :

$$\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = BS = \frac{Ba^2}{2}\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Ba^2}{2}\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)$$

Chaque tige a une résistance R et on néglige l'auto-induction. Loi des mailles :

$$\boxed{2Ri = -\frac{Ba^2}{2}\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)}$$

Chaque barre subit trois actions mécaniques : poids (au centre de masse), force de Laplace (au centre de masse) et liaison pivot parfaite donc de moment nul.

Moment du poids de la tige $n = 1, 2$:

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{P_n}\right) = \left(\frac{a}{2}\,\overrightarrow{u}_{r_n} \wedge mg\overrightarrow{u}_x\right) \cdot \overrightarrow{u}_z = -\frac{mga}{2}\,\sin(\theta_n)$$

Moment de la force de Laplace :

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F}_{L,1}\right) = \left(\frac{a}{2}\,\overrightarrow{u}_{r_1} \wedge iaB\,\overrightarrow{u}_{\theta_1}\right) \cdot \overrightarrow{u}_z = \frac{ia^2B}{2}$$
$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F}_{L,2}\right) = \left(\frac{a}{2}\,\overrightarrow{u}_{r_2} \wedge iaB\,\overrightarrow{u}_{\theta_2}\right) \cdot \overrightarrow{u}_z = -\frac{ia^2B}{2}$$

On applique le TMC pour chaque barre.

$$\boxed{J\ddot{\theta}_1 = -\frac{mga}{2}\,\sin(\theta_1) + \frac{ia^2B}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{J\ddot{\theta}_2 = -\frac{mga}{2}\,\sin(\theta_2) - \frac{ia^2B}{2}}$$

3) Injectons l'EE dans les EM + on se place aux petits angles.

$$J\ddot{\theta}_1 = -\frac{mga}{2}\,\theta_1 - \frac{\dot{\beta}}{2R}\left(\frac{a^2B}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad J\ddot{\theta}_2 = -\frac{mga}{2}\,\theta_2 + \frac{\dot{\beta}}{2R}\left(\frac{a^2B}{2}\right)^2$$

Faisons la somme et la différence de ces deux équations :

$$\boxed{J\ddot{\alpha} = -\frac{mga}{2}\,\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{J\ddot{\beta} = -\frac{mga}{2}\,\beta - \frac{\dot{\beta}}{R}\left(\frac{a^2B}{2}\right)^2}$$

4) Mettons ces ED sous forme canonique :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\,\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\beta} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{\beta} + \omega_0^2\,\beta = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{2J}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{JR}\left(\frac{a^2B}{2}\right)^2$$

On se place en régime pseudo-périodique. On note :

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

On a donc :

$$\alpha(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \beta(t) = e^{-\lambda t}\left(C\cos(\Omega t) + D\sin(\Omega t)\right)$$

Avec les CI, il vient :

$$\alpha(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \beta(t) = \theta_0\,e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right] \\ \theta_2(t) &= \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t) - e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right] \end{aligned}}$$

En régime établit, on a :

$$\boxed{\theta_1(t) = \theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}\cos(\omega_0 t)}$$

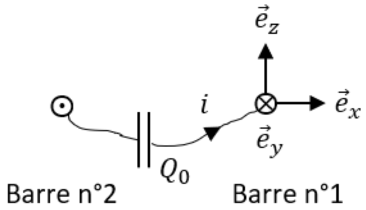
Les deux pendules sont confondus, il n'y a donc plus de variation de flux et plus de phénomène d'induction.

Exercice n°9 • Recul par induction ★★★

On suppose que le temps de décharge $\tau = RC$ du condensateur est négligeable devant le temps caractéristique de déplacement des barres. Mathématiquement cela se traduit par le fait que 5τ est un temps quasi-infini du point de vue des phénomènes électriques mais quasi-nul du point de vue des phénomènes mécaniques. L'expérience ce découple donc en plusieurs phénomènes bien distincts :

- barres initialement à $\theta = 0$ et $v = 0$;
- décharge du condensateur, qui fait passer un courant dans le circuit, qui produit une force de Laplace ;
- cette dernière modifie les conditions initiales : $\theta = 0$ (phénomènes mécaniques lents) et $v > 0$ (intégrale du PFD) ;
- les barres se soulèvent.

On va s'intéresser uniquement à la barre n°1 (par symétrie, le problème est le même pour la barre 2). On oriente le courant de A_1 vers A_1'.



Elle subit une force linéique de Laplace :

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}_{2\to 1} = i\,\overrightarrow{u}_{A_1A_1'} \wedge \overrightarrow{B}_{2\text{ en }1} = i\,\overrightarrow{e}_y \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\,\overrightarrow{e}_z = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}\,\overrightarrow{e}_x$$

Or, pour la décharge d'un condensateur :

$$\dot{u}_c + \frac{u_c}{\tau} = 0 \quad\Rightarrow\quad u_c(t) = -\frac{Q_0}{C}\,e^{-t/\tau} \quad\Rightarrow\quad i(t) = C\,\frac{du_c}{dt} = \frac{Q_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$$

PFD sur un élément de longueur de la barre n°1 :

$$\lambda\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{F}}_{2\to 1} \quad\Rightarrow\quad d\overrightarrow{v} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi\lambda d}\,dt\,\overrightarrow{e}_x$$

On intègre le PFD entre 0 et 5τ (temps considéré pour la décharge du condensateur). On note $\overrightarrow{v}_0$ la vitesse de la barre à cette instant.

$$\int_{\overrightarrow{0}}^{\overrightarrow{v}_0} d\overrightarrow{v} = \frac{\mu_0 Q_0^2}{2\pi\lambda\tau^2 d}\overrightarrow{e}_x \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau}\,dt \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{v}_0 = \frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\lambda\tau d}\overrightarrow{e}_x$$

Du point de vue mécanique, la barre est initialement à $\theta = 0$ avec une vitesse non nulle. Le mouvement étant conservatif, cette énergie cinétique va entièrement être convertie en énergie potentielle de pesanteur. Ainsi, le TEM sur un élément de longueur de la barre n°1 donne :

$$\frac{1}{2}\lambda v_0^2 = \lambda g h \quad\Rightarrow\quad \boxed{h = \frac{1}{2g}\cdot\left(\frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\lambda RCd}\right)^2}$$